

【はじめに】

振動する電荷や、電気ダイポールアンテナが生み出す電磁界が、空間をどのように伝わっていくのか今さらだが、解析してみた。

この課題に取り組んだ動機は、アンテナから出た電界・磁界が、場所によって位相が違うという事実を詳しく調べたかったからである。

アンテナのごく近傍では、電界は磁界より90°遅れて変動しているが、遠方では、同位相になっている。つまり、アンテナから距離が離れるにつれて、電界波と磁界波が互いに追いつくか追いつかれるという過程があるだろうと推測される。

電界と磁界の位相差が距離とともにどのように変化しているのか文献を探しても、ずばりな答えが載っているものがないので、本レポートにおいて、遅延ポテンシャルに基づいた電磁界の式を用いて解析し、考察した。

1. 変動する電荷のまわりの電界

図1の座標の原点に置かれた電荷  $q$  が

$$q(t) = q_0 \sin \omega t \quad (1)$$

で与えられているとする。

このとき、極座標  $(r, \theta, \phi)$  でのポテンシャル  $\psi$  は

$$\psi(r, t) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r} \sin \omega(t - r/c) \quad (2)$$

となる。電荷のまわりの場は、球対称なので  $\psi$  は  $\theta, \phi$  に無関係である。

次に、電荷のまわりの電界  $\mathbf{E}$  を求めてみる。

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\text{grad } \psi \\ &= -\left( \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{u}_\phi \right) \psi \\ &= E_r \mathbf{u}_r + E_\theta \mathbf{u}_\theta + E_\phi \mathbf{u}_\phi \\ &= -\frac{\partial \psi}{\partial r} \end{aligned} \quad (3)$$

ただし、

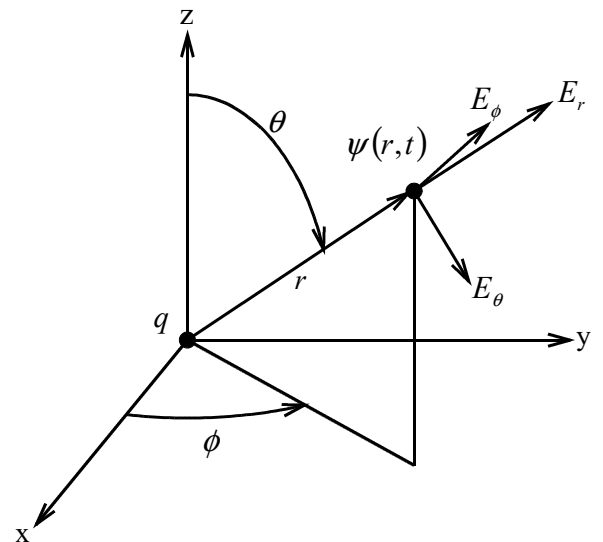


図1 変動する電荷のまわりの場

$$\begin{aligned}
E_r &= -\frac{\partial \psi}{\partial r} \\
&= -\frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{-\frac{\omega}{c}r \cos \omega\left(t-\frac{r}{c}\right) - \sin \omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r^2} \\
&= \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\omega}{cr} \cos \omega\left(t-\frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r^2} \sin \omega\left(t-\frac{r}{c}\right) \right\} \\
&= \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\left(\frac{\omega}{cr}\right)^2 + \left(\frac{1}{r^2}\right)^2} \sin \left\{ \omega\left(t-\frac{r}{c}\right) + \tan^{-1} \frac{\omega r}{c} \right\} \\
&= \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\left(\frac{\omega}{cr}\right)^2 + \left(\frac{1}{r^2}\right)^2} \sin \theta_E
\end{aligned} \tag{4}$$

$$E_\theta = 0$$

$$E_\phi = 0$$

ここで

$$\theta_E = \omega\left(t-\frac{r}{c}\right) + \tan^{-1} \frac{\omega r}{c} \tag{5}$$

は、伝搬する波の位相を意味する。この式を用いて、位相速度を求めてみよう。

位相速度とは、一定の位相ポイントが移動する速度である。式(5)を  $t$  について書き直し、また、

$\theta_E = \theta_{const}$  (一定値) とすると、電界  $\mathbf{E}$  の位相速度  $v_E$  を与える式が以下のように得られる。

$$t = \frac{\theta_{const} + \frac{\omega}{c}r - \tan^{-1} \frac{\omega}{c}r}{\omega} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial t}{\partial r} &= \frac{\frac{\omega}{c} - \frac{\frac{\omega}{c}}{1 + \left(\frac{\omega}{c}r\right)^2}}{\omega} \\
&= \frac{1}{c} - \frac{\frac{1}{c}}{1 + \left(\frac{\omega}{c}r\right)^2}
\end{aligned} \tag{7}$$

$$v_E = \frac{\partial r}{\partial t} = \frac{1}{\frac{\partial t}{\partial r}} = \left\{ 1 + \frac{1}{\left(\frac{\omega}{c}r\right)^2} \right\} c \quad (8)$$

ここで  $\omega/c$  は  $\psi$  の「波数」だから、これを  $k$  とおくと

$$v_E = \left\{ 1 + \frac{1}{(kr)^2} \right\} c \quad (9)$$

となる。この式からわかることは、 $v_E$  は光速  $c$  よりも大きい値を持ち、波源に近いほど大きくなっている。

電荷保存の原理からこの波源と同じものを作ることはできないが、近似法としてホログラムの原理で空間にイメージとして生ぜしめることはできるだろう。波源イメージをフーリエ変換するとホログラムのパターンが得られる。この場合、波源が「点」であるから、ホログラムは同心円状のリングとなる。

## 2. 微小ダイポール近傍の電磁場

図2に示すように長さ  $l$  の区間にわたって正弦波的時間変化で一様に流れる線電流  $I$  を考える。

電流の連続性を保つために、電流の端には

$$\pm Q = \pm \frac{I}{j\omega} \quad (10)$$

の電荷が蓄積されることになる。したがって線電流は、

$$P = Ql = \frac{Il}{j\omega} \quad (11)$$

の電気双極子と一体になっていると考えることができる。

ここでは、電流・双極子のサイズが波長よりもずっと小さいと仮定して(つまり  $lk < 1$  として)、周囲の電磁界について考えてみる。

このように定義した波源から放射される電磁界は、以下のように記述される。

$$E_r = \frac{Il e^{-jkr}}{j2\pi\omega\epsilon_0} \left( \frac{1}{r^3} + \frac{jk}{r^2} \right) \cos\theta e^{j\omega t} \quad (12)$$

$$E_\theta = \frac{Il e^{-jkr}}{j4\pi\omega\epsilon_0} \left( \frac{1}{r^3} + \frac{jk}{r^2} - \frac{k^2}{r} \right) \sin\theta e^{j\omega t} \quad (13)$$

$$H_\phi = \frac{Il e^{-jkr}}{4\pi} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{jk}{r} \right) \sin\theta e^{j\omega t} \quad (14)$$

$$E_\phi = H_r = H_\theta = 0 \quad (15)$$

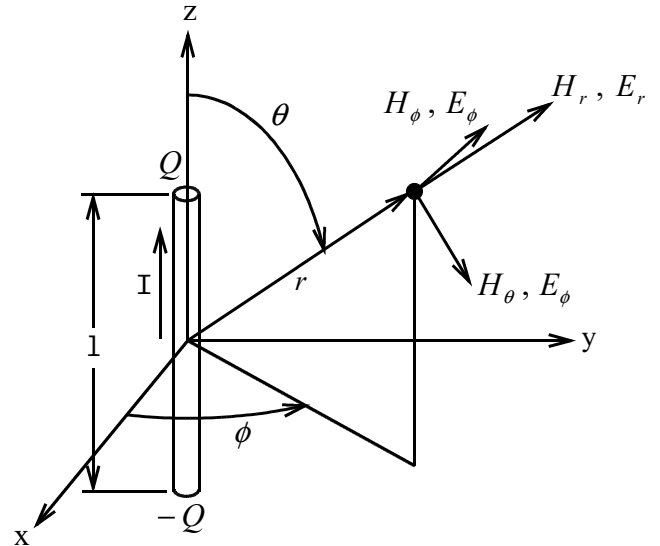


図2 微小ダイポールの放射界

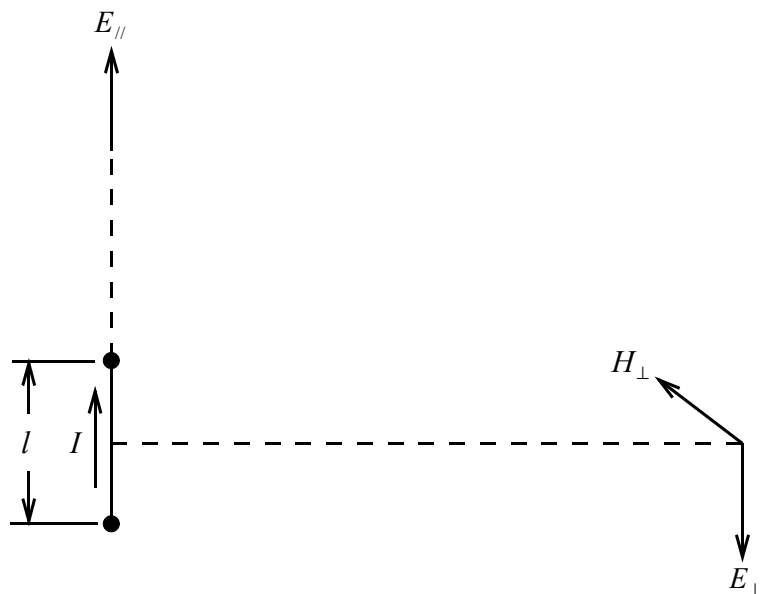


図3 特定の方向の電磁界成分

次に、ダイポールに対して直角な軸上での電磁界  $E_{\perp}$ ,  $H_{\perp}$  とダイポールと平行な軸 ( $z$  軸) 上の電界  $E_{\parallel}$  について考えてみる。それぞれの成分は以下の式で与えられる。

$$E_{\perp} = E_{\theta} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{I l k^3 e^{-jkr}}{4\pi\omega\epsilon_0} \left( j \frac{1}{kr} + \frac{1}{(kr)^2} - j \frac{1}{(kr)^3} \right) e^{j\omega t} \quad (16)$$

$$H_{\perp} = H_{\phi} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{I l k^2 e^{-jkr}}{4\pi} \left( j \frac{1}{kr} + \frac{1}{(kr)^2} \right) e^{j\omega t} \quad (17)$$

$$E_{\parallel} = E_r \Big|_{\theta=0} = \frac{I l k^3 e^{-jkr}}{2\pi\omega\epsilon_0} \left( \frac{1}{(kr)^2} - j \frac{1}{(kr)^3} \right) e^{j\omega t} \quad (18)$$

次に、 $E_{\perp}$ ,  $H_{\perp}$ ,  $E_{\parallel}$  の位相速度を求めてみる。

## 2.1. $E_{\perp}$ の位相速度

式(16)より、

$$\begin{aligned}
 E_{\perp} &= \frac{I l k^3 e^{-jkr}}{4\pi\omega\epsilon_0} \sqrt{\frac{1}{(kr)^2} + \left\{ \frac{1}{kr} - \frac{1}{(kr)^3} \right\}^2} e^{j \tan^{-1}\left(kr - \frac{1}{kr}\right)} e^{j\omega t} \\
 &= \frac{I l k^3 e^{-jkr}}{4\pi\omega\epsilon_0} \sqrt{\frac{1}{(kr)^2} + \left\{ \frac{1}{kr} - \frac{1}{(kr)^3} \right\}^2} e^{j\theta_{E_{\perp}}}
 \end{aligned} \tag{19}$$

ただし

$$\theta_{E_{\perp}} = \omega t - kr + \tan^{-1}\left(kr - \frac{1}{kr}\right) \tag{20}$$

は、伝搬する波の位相である。この式を用いて、位相速度を求めてみよう。

式(20)を  $t$  について書き直し、また、 $\theta_{E_{\perp}} = \theta_{const}$  (一定値) とすると、 $E_{\perp}$  の位相速度  $v_{E_{\perp}}$  を与える式が以下のように得られる。

$$t = \frac{\theta_{const} + kr - \tan^{-1}\left(kr - \frac{1}{kr}\right)}{kc} \tag{21}$$

$$\frac{\partial t}{\partial r} = \frac{1 - \frac{1 + 1/(kr)^2}{1 + (kr - 1/(kr))^2}}{c} \tag{22}$$

$$v_{E_{\perp}} = \frac{\partial r}{\partial t} = \frac{1}{\frac{\partial t}{\partial r}} = \frac{\left(kr - \frac{1}{kr}\right)^2 + 1}{(kr)^2 - 2} c \tag{23}$$

## 2.2. $H_{\perp}$ の位相速度

式(17)より、

$$\begin{aligned}
 H_{\perp} &= \frac{I l k^2 e^{-jkr}}{4\pi} \sqrt{\frac{1}{(kr)^2} + \frac{1}{(kr)^4}} e^{j \tan^{-1}(kr)} e^{j\omega t} \\
 &= \frac{I l k^2 e^{-jkr}}{4\pi} \sqrt{\frac{1}{(kr)^2} + \frac{1}{(kr)^4}} e^{j\theta_{H_{\perp}}}
 \end{aligned} \tag{24}$$

ただし、

$$\theta_{H_{\perp}} = \omega t - kr + \tan^{-1}(kr) \tag{25}$$

は、伝搬する波の位相である。この式を用いて、位相速度を求めてみよう。

式(25)を  $t$  について書き直し、また、 $\theta_{H_{\perp}} = \theta_{const}$  (一定値) とすると、 $H_{\perp}$  の位相速度  $v_{H_{\perp}}$  を与える式が以下のように得られる。

$$t = \frac{\theta_{const} + kr - \tan^{-1}(kr)}{kc} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial t}{\partial r} &= \frac{k - \frac{k}{1+(kr)^2}}{kc} \\
 &= \frac{1 - \frac{1}{1+(kr)^2}}{c}
 \end{aligned} \tag{27}$$

$$v_{H_{\perp}} = \frac{\partial r}{\partial t} = \frac{1}{\frac{\partial t}{\partial r}} = \left\{ 1 + \frac{1}{(kr)^2} \right\} c \tag{28}$$

### 2.3. $E_{//}$ の位相速度

式(18)より、

$$\begin{aligned}
 E_{//} &= \frac{I l k^3 e^{-jkr}}{2\pi\omega\epsilon_0} \sqrt{\frac{1}{(kr)^4} + \frac{1}{(kr)^6}} e^{j \tan^{-1} \frac{-1}{kr}} e^{j\omega t} \\
 &= \frac{I l k^3 e^{-jkr}}{2\pi\omega\epsilon_0} \sqrt{\frac{1}{(kr)^4} + \frac{1}{(kr)^6}} e^{j\theta_{E_{//}}}
 \end{aligned} \tag{29}$$

ただし、

$$\theta_{E_{//}} = \omega t - kr + \tan^{-1} \frac{-1}{kr} \tag{30}$$

は、伝搬する波の位相である。この式を用いて、位相速度を求めてみよう。

式(30)を  $t$  について書き直し、また、 $\theta_{E_{//}} = \theta_{const}$  (一定値) とすると、 $E_{//}$  の位相速度  $v_{E_{//}}$  を与える式が以下のように得られる。

$$t = \frac{\theta_{const} + kr - \tan^{-1} \frac{-1}{kr}}{kc} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial t}{\partial r} &= \frac{k - \frac{1/(kr)^2}{1 + 1/(kr)^2}}{kc} \\
 &= \frac{1 - \frac{1/(kr)^2}{1 + 1/(kr)^2}}{c}
 \end{aligned} \tag{32}$$

$$v_{E_{//}} = \frac{\partial r}{\partial t} = \frac{1}{\frac{\partial t}{\partial r}} = \left\{ 1 + \frac{1}{(kr)^2} \right\} c \tag{33}$$



## 2.4. $v_{E_{\perp}}$ 、 $\theta_{E_{\perp}}$ 、 $v_{H_{\perp}}$ 、 $\theta_{H_{\perp}}$ 、 $v_{E_{//}}$ 、 $\theta_{E_{//}}$ の考察

図4に距離に対する $v_{E_{\perp}}$ 、 $\theta_{E_{\perp}}$ 、 $v_{H_{\perp}}$ 、 $\theta_{H_{\perp}}$ 、 $v_{E_{//}}$ 、 $\theta_{E_{//}}$ の変化を示す。横軸は規格化された「距離」 $kr$ であり、 $0 \sim 2\pi$ の範囲を図に示している。これは実距離にして1波長の長さである。

### 2.4.1. 位相速度の特徴

前述の式からわかるように、 $v_{H_{\perp}}$ と $v_{E_{//}}$ は同じ値を持つ。ちなみに、1.で求めた位相速度 $v_E$ も同じ値を持つ。

$v_{E_{\perp}}$ は、 $kr = \sqrt{2}$ となる点で、特異点となる。ここで面白いのは、 $0 < kr < \sqrt{2}$ の区間で $v_{E_{\perp}}$ が負の値を持つことである。つまり、この区間では、 $E_{\perp}$ は波源に向かって進行するように振る舞う。

また、 $v_{E_{\perp}}$ は、 $kr = \sqrt{\sqrt{3}-1}$ において極値 $-0.866c$ を持つ。

### 2.4.2. 位相の特徴

$\theta_{E_{\perp}}$ と $\theta_{H_{\perp}}$ は波源の位置では、 $90^\circ$ の位相差があるが、遠ざかるにつれて同位相に近づいている。波源近傍で位相差があるということは、ポインティングベクトル(空間を伝搬するパワー) $\mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{H}_{\perp}$ が呼吸するような往復流になっていることを意味する。このことは、給電側からみると微少ダイオードにリアクタンスとしての電気的特性が明確に現れることと対応している。

「往復流」のポインティングベクトルは、一度波源から出たエネルギーが途中で引き返し、波源の中に帰ってゆくことを意味するのであるが、ポテンシャル波動が常に波源から遠ざかる方向に伝搬する事実からは直感的に類推しにくい。

2.4.1.で述べた波源に向かう波のことも加味して考えると、空間のエネルギーフローは、物体の運動のような明確なものではなく、ポテンシャル波動が励起する見かけ上の流れだと解釈するのが妥当と思われる。

$\theta_{E_{\perp}}$ と $\theta_{H_{\perp}}$ の位相差が0に漸近している遠方では、ポインティングベクトルは一方向の流れとなり、いわゆる無線電波となる。

$\theta_{E_{\perp}}$ と $\theta_{E_{//}}$ は、常に $90^\circ$ の位相差を保っている。 $\theta_{E_{//}}$ は主に $Q$ によって生じる位相であり、 $\theta_{E_{\perp}}$ は主に $I$ によって生じる位相でもある。 $Q$ と $I$ はもともと $90^\circ$ の位相差を持っているので、この位相差が $\theta_{E_{\perp}}$ 、 $\theta_{E_{//}}$ に反映されている。

$\theta_{E_{//}}$ が波源から $45^\circ$ 、 $90^\circ$ の遅れを持つ点は、 $r = 0.29662\lambda$ 、 $0.44537698\lambda$ の距離にある。

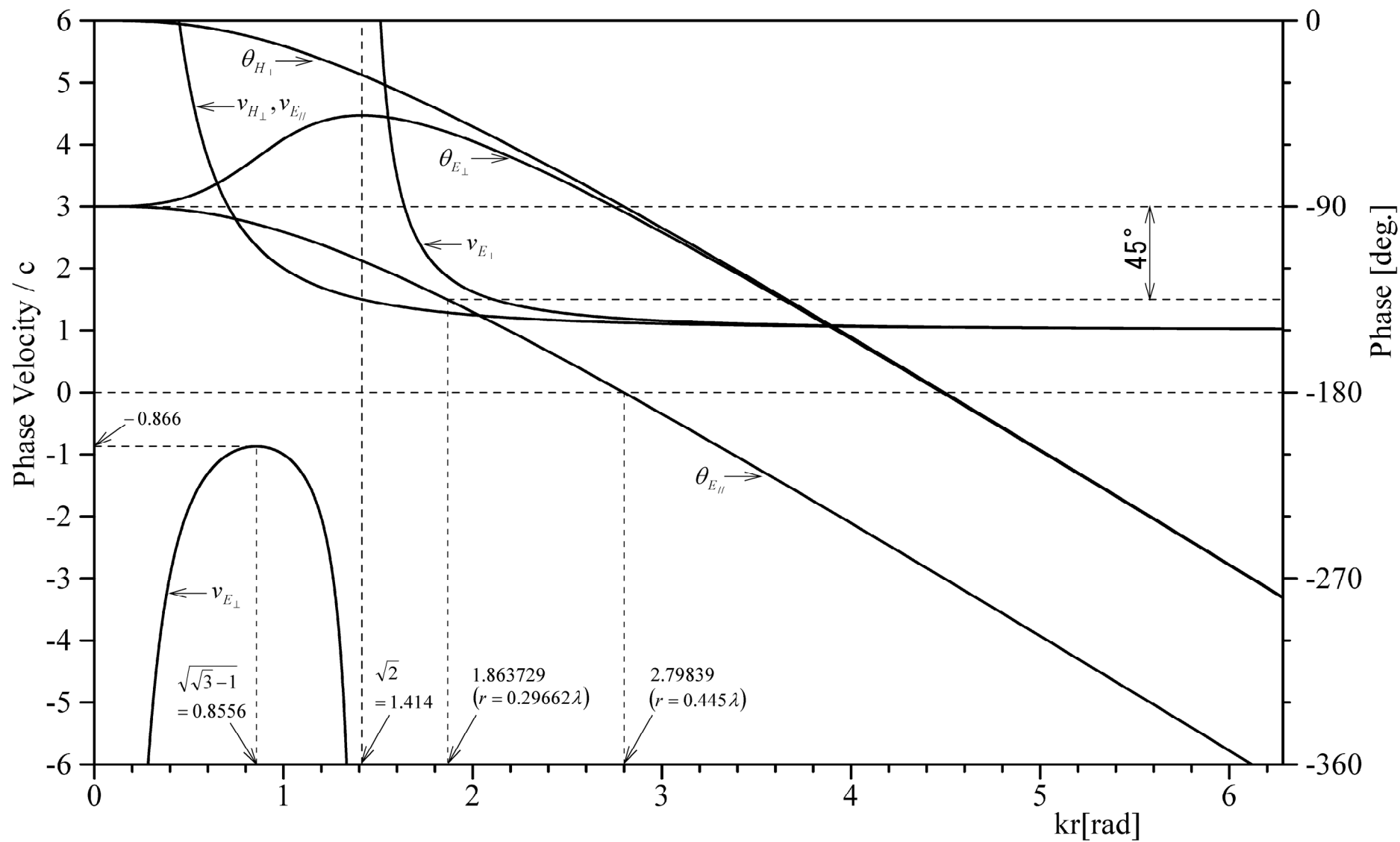


図4 距離に対する位相速度、位相の変化

### 2.4.3. 位相速度と群速度

等方媒質中で、平面波の位相速度、群速度を論ずる場合は両者の積が自由空間中での速度の2乗になる。たとえば、導波管内での伝搬を扱う場合がそうである。双方のベクトルは、図5のような関係になる。

ところが、縦波の球面波を扱う場合はこのようにならない。縦波を変調すると位相速度と群速度が現れるが、双方は同じ向きに進行するが異なる値を持つ。(図6)

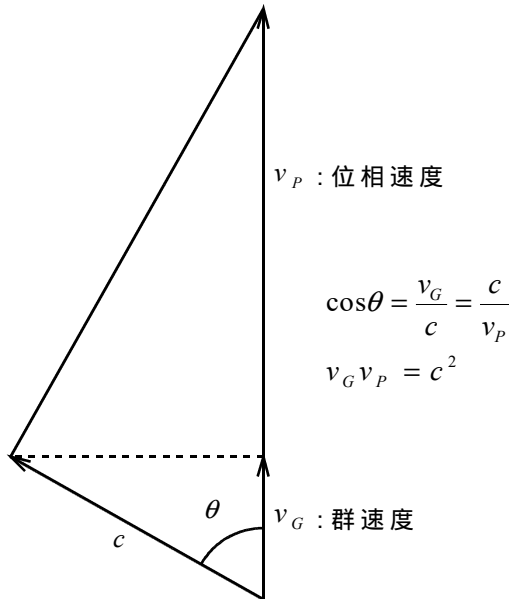


図5 導波管内電磁波の群速度と位相速度

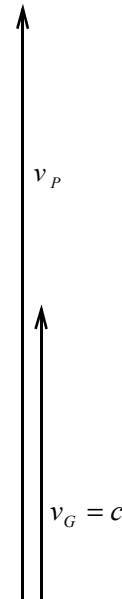


図6 縦波(球面波)の位相速度と群速度

#### 【あしがき】

解析によってわかったことは、アンテナ近傍では、位相が超光速で伝搬する世界になっている。

波面が光速を超えて伝わる現象があることは他の例で知られている。たとえば、エバネッセント光の伝搬である。

電界の波は磁界よりも遅れて出発するが、約1波長の距離を伝搬する過程で、磁界にほぼ追いつくことがわかった。

知り尽くされていたと思っていた電磁気の世界であるが、まだ拾える果実があった。

ここで得られた成果は、テスラコイルの実験に役立てたい。

## 改訂履歴

1990-0909 初版作成 (EKBO 杉山敏樹)

2009-0128 誤記訂正(式(7)のkをjに訂正) (EKBO 杉山敏樹)

2012-0716 誤記訂正(図4の  $v_{H_{\perp}}$  を  $v_{E_{\parallel}}$  に訂正) (EKBO 杉山敏樹)

2013-1129 「はじめに」「あとがき」追記 (EKBO 杉山敏樹)

2023-0124 ハイパーリンク更新