電気ダイポール波源近傍の電磁界

EKBO 杉山敏樹　https://eqbo.jp/

【はじめに】

　アンテナから出る電磁界はどのように放射され、アンテナから離れていくのだろうか。

　電磁波工学の書物で、波源近傍の電磁界の式をよく見かけるが、それらを導く過程が省略してあるので、どんな近似が含まれているのかわからなかった。つまり、誤差を無視できる適用範囲がどれくらいなのか不明であった。

　今後、高周波の高電圧機器を設計するにあたり、近傍の電磁界を扱う機会が増えるため、式の導出過程を把握し、近似適用の範囲を判断できるようにしておく必要がある。

　本ノートでは、「電気ダイポール」が輻射する電磁界の式について、ポテンシャルの伝搬遅延を考慮した導出過程を詳述した。

１．波源モデル

　図１に示すように長さ l の区間にわたって正弦波的時間変化で一様に流れる線電流 I を考える。

$$I(t') = I_0\, e^{j\omega t'} \qquad (1)$$

電流の連続性を保つために、電流の端には

$$\begin{aligned} Q &= \int I\, dt \\ &= -j\frac{I_0}{\omega} e^{j\omega t'} \qquad (2) \\ &= Q_0\, e^{j\omega t'} \end{aligned}$$

(但し、$Q_0 = -j\dfrac{I_0}{\omega}$)

の電荷が蓄積されることになる。したがって線電流は、

$$P = Q\,l = -j\frac{I\,l}{\omega} \qquad (3)$$

の電気双極子と一体になっていると考えることができる。

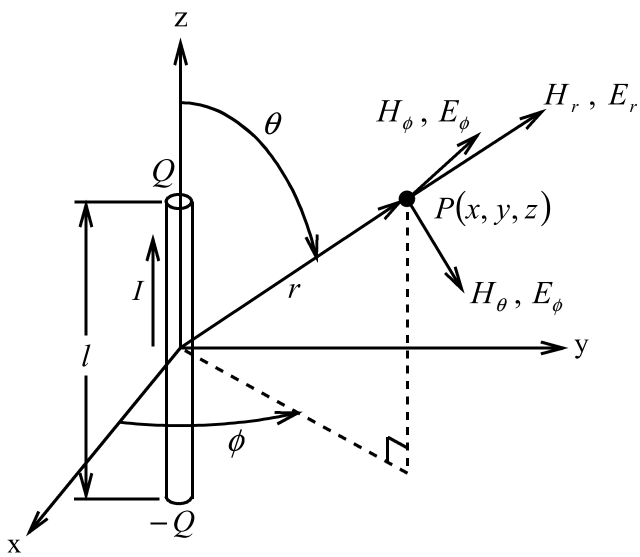

図1 微少ダイポールの放射界(極座標成分)

式(1),(2)に現れる時間 t' は、観測点 P までの事象伝搬遅延を加味しているものとし、以下の意味を持つ。

$$t' = t - \frac{r}{c} \qquad (4)$$

ここに現れる r は、事象発生点から観測点 P までの距離であり、c は、事象の伝搬速度(光速)である。

２．クーロンポテンシャル

まず、図２に示すように、Q、$-Q$ が点 P に及ぼすクーロンポテンシャル ψ を算出する。

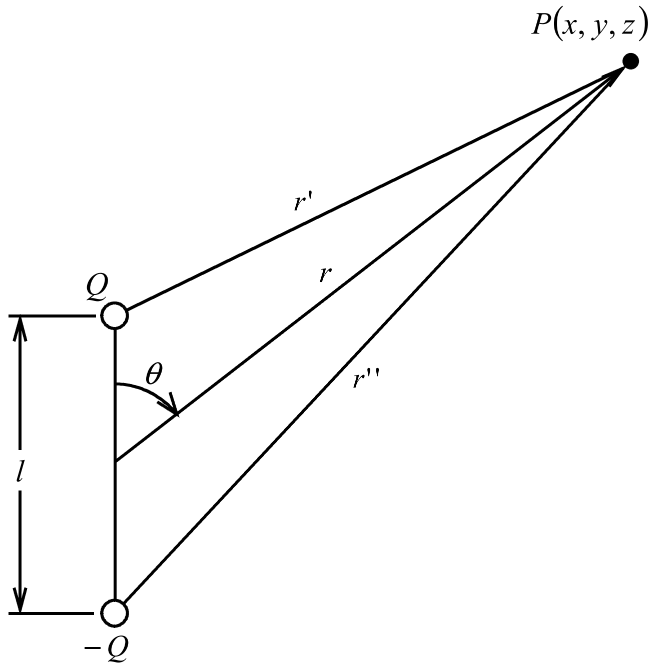

図２ クーロンポテンシャル算出モデル

$$
\begin{aligned}
\psi(r,t) &= \frac{Q(t-r'/c)}{4\pi\varepsilon_0 r'} - \frac{Q(t-r''/c)}{4\pi\varepsilon_0 r''} \\
&= \frac{Q_0\, e^{j\omega(t-r'/c)}}{4\pi\varepsilon_0 r'} - \frac{Q_0\, e^{j\omega(t-r''/c)}}{4\pi\varepsilon_0 r''} \\
&= \frac{Q_0\, e^{j(\omega t-kr')}}{4\pi\varepsilon_0 r'} - \frac{Q_0\, e^{j(\omega t-kr'')}}{4\pi\varepsilon_0 r''}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

ただし、$k=\omega/c$ は、波数を意味する。

以下、$l<<r$ と仮定すると、r'、r'' は次のように近似できる。

$$
\begin{aligned}
r' &\approx r - \frac{l}{2}\cos\theta \\
r'' &\approx r + \frac{l}{2}\cos\theta
\end{aligned}
\tag{6}
$$

式(6)を式(5)に代入すると

$$
\begin{aligned}
\psi(r,t) &= \frac{Q_0\, e^{j(\omega t-kr)}}{4\pi\varepsilon_0 r}\left\{\frac{e^{jkl\frac{\cos\theta}{2}}}{1-\frac{l}{2r}\cos\theta} - \frac{e^{-jkl\frac{\cos\theta}{2}}}{1+\frac{l}{2r}\cos\theta}\right\} \\
&= \frac{Q_0\, e^{j(\omega t-kr)}}{4\pi\varepsilon_0 r}\left\{e^{jkl\frac{\cos\theta}{2}} - e^{-jkl\frac{\cos\theta}{2}} + \frac{l}{2r}\cos\theta\left(e^{jkl\frac{\cos\theta}{2}} + e^{-jkl\frac{\cos\theta}{2}}\right)\right\} \\
&= \frac{Q_0\, e^{j(\omega t-kr)}}{4\pi\varepsilon_0 r}\left\{j2\sin\left(kl\frac{\cos\theta}{2}\right) + \frac{l}{r}\cos\theta\cos\left(kl\frac{\cos\theta}{2}\right)\right\}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

式(7)には、入れ子になった三角関数が含まれている。この形式のままで電界を導くことは不可能ではないが、見通しのよい表現にするため、$\sin\left(\frac{kl\cos\theta}{2}\right)$、$\cos\left(\frac{kl\cos\theta}{2}\right)$ の部分をテイラー展開し、近似式を得てみる。

備考（三角関数のテイラー展開）

$$
\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n)!}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

したがって、

$$\sin\frac{kl\cos\theta}{2}=\frac{kl\cos\theta}{2}-\frac{k^3l^3\cos^3\theta}{48}+\frac{k^5l^5\cos^5\theta}{3840}-\cdots$$
$$\cos\frac{kl\cos\theta}{2}=1-\frac{k^2l^2\cos^2\theta}{8}+\frac{k^4l^4\cos^4\theta}{384}-\frac{k^6l^6\cos^6\theta}{46080}+\cdots \tag{9}$$

ここで、近似条件として $kl<<1$ (換言すれば $l<<\lambda/(2\pi)$)と仮定すると、２次以降の項が極端に小さくなることがわかるので、

$$\sin\frac{kl\cos\theta}{2}\approx\frac{kl\cos\theta}{2}$$
$$\cos\frac{kl\cos\theta}{2}\approx 1 \tag{10}$$

として、式(10)を式(7)に代入すると

$$\psi(r,t)=\frac{Q_0e^{j(\omega t-kr)}}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(jkl\cos\theta+\frac{l}{r}\cos\theta\right) \tag{11}$$

ここで、$Q_0=-j\dfrac{I_0}{\omega}$ の関係を用いると

$$\psi(r,t)=\frac{I_0lk^2e^{j(\omega t-kr)}}{4\pi\varepsilon_0\omega}\left(\frac{1}{kr}-j\frac{1}{(kr)^2}\right)\cos\theta \tag{12}$$

さらに、$\omega=k/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ の関係を用いると

$$\psi(r,t)=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{I_0\,l\,k\,e^{j(\omega t-kr)}}{4\pi}\left(\frac{1}{kr}-j\frac{1}{(kr)^2}\right)\cos\theta \tag{13}$$

となる。

３．ベクトルポテンシャル

次に、図３に示すように電流 I が点 P におよぼすベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ を算出する。

長さ dz_1 の電流素片が及ぼすベクトルポテンシャル $d\mathbf{A}$ は、

$$d\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\mathbf{k}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{I(z_1,t-r_1/c)}{r_1}dz_1 \qquad (14)$$

ここで、$\mathbf{k}$ は z 方向の単位ベクトルである。

式(14)を $z_1=-l/2$〜$l/2$ の区間で積分すると

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)&=\mathbf{k}\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-l/2}^{l/2}\frac{I(z_1,t-r_1/c)}{r_1}dz_1\\&=\mathbf{k}\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-l/2}^{l/2}\frac{I_0e^{j\omega(t-r_1/c)}}{r_1}dz_1 \qquad (15)\\&=\mathbf{k}\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-l/2}^{l/2}\frac{I_0e^{j(\omega t-kr_1)}}{r_1}dz_1\end{aligned}$$

ここで、近似条件 $l<<r$ を用い、

$$r_1\approx r-z_1\cos\theta \qquad (16)$$

とおくと、

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\mathbf{k}\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-l/2}^{l/2}\frac{I_0e^{j\{\omega t-k(r-z_1\cos\theta)\}}}{r-z_1\cos\theta}dz_1 \qquad (17)$$

となる。さらに、近似条件より、$z_1\cos\theta<<r$ ということも云え、$z_1\cos\theta$ によって導関数が大きく変動する特異点が無いため $z_1\cos\theta$ を無視する。

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)&=\mathbf{k}\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-l/2}^{l/2}\frac{I_0e^{j(\omega t-kr)}}{r}dz_1\\&=\mathbf{k}\frac{\mu_0I_0le^{j(\omega t-kr)}}{4\pi r}\end{aligned} \qquad (18)$$

これを極座標成分に分解すると

$$A_r(\mathbf{r},t)=\frac{\mu_0I_0l\,k\,e^{j(\omega t-kr)}}{4\pi}\frac{1}{kr}\cos\theta \qquad (19)$$

$$A_\theta(\mathbf{r},t)=-\frac{\mu_0I_0l\,k\,e^{j(\omega t-kr)}}{4\pi}\frac{1}{kr}\sin\theta \qquad (20)$$

を得る。

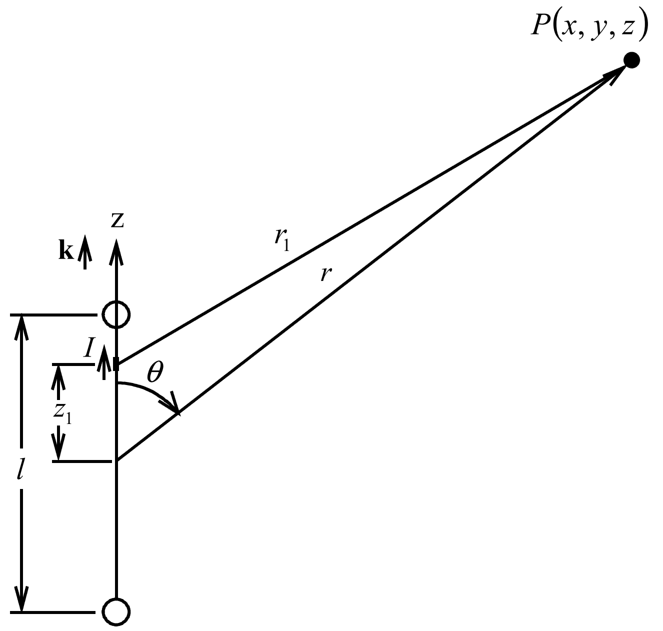

図３ ベクトルポテンシャル算出モデル

４．電界・磁界の算出

４元ポテンシャルψ、$\mathbf{A}$から電界$\mathbf{E}$、磁界$\mathbf{B}$を算出する基本式は

$$\mathbf{E} = -grad\,\psi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \qquad (21)$$

$$\mathbf{B} = rot\,\mathbf{A} \qquad (22)$$

である。

ダイポールが放射する電磁界の分布のしかたは、リンゴのような回転体構造になると推測できるので、図１のように極座標で表したときに変数分離が容易だと思われる。式(21),(22)を極座標形式に変換すると以下の表現になる。

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial t} \qquad (23)$$

$$E_r = -\frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial t} \qquad (24)$$

$$B_\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial t} \qquad (25)$$

$E_\phi = 0$、$B_r = 0$、$B_\theta = 0$ (26)

式(13),(19),(20)を式(23),(24),(25)に代入することにより、求める電磁界が得られ、整理すると以下のようになる。

$$E_\theta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{I_0 l\,k^2 e^{j(\omega t - kr)}}{4\pi}\left\{\frac{1}{(kr)^2} + j\left(\frac{1}{kr} - \frac{1}{(kr)^3}\right)\right\}\sin\theta \qquad (27)$$

$$E_r = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{I_0 l\,k^2 e^{j(\omega t - kr)}}{2\pi}\left(\frac{1}{(kr)^2} - j\frac{1}{(kr)^3}\right)\cos\theta \qquad (28)$$

$$B_\phi = \mu_0\frac{I_0 l\,k^2 e^{j(\omega t - kr)}}{4\pi}\left(\frac{1}{(kr)^2} + j\frac{1}{kr}\right)\sin\theta \qquad (29)$$

式(27),(28),(29)がダイポールアンテナの近傍で観測される電磁界である。

ちなみに、ここまでの導出で加味した近似条件は、以下の２つである。

[1] $l << \lambda/(2\pi)$

[2] $l << r$

５．遠方解

式(27),(28),(29)には、kr の１乗、２乗、３乗に反比例する項があり、遠方になると、２乗、３乗に反比例する成分は急激に減衰するため、無視できる。
この場合、式は以下のように簡略化される。

$$E_\theta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{I_0 l\, k^2 e^{j(\omega t - kr)}}{4\pi} \left(j \frac{1}{kr} \right) \sin\theta \qquad (30)$$

$$E_r = 0 \qquad (31)$$

$$B_\phi = \mu_0 \frac{I_0 l\, k^2 e^{j(\omega t - kr)}}{4\pi} \left(j \frac{1}{kr} \right) \sin\theta \qquad (32)$$

E_θ , B_ϕ は、いずれも「虚部」なので互いに同位相となることがわかる。

しかし、近傍解では、実部と虚部が混在しているので、電界と磁界に位相差が生じ、距離の変化に伴って、位相差は複雑に変化すると思われる。この点は、新たな課題として明らかにしたく、別の機会に解析を行う。

６．近傍と遠方の境界

式(27),(28),(29)に現れる kr について、$kr = 1$ （つまり、$r = \dfrac{\lambda}{2\pi}$ ）のときに、各項がそれぞれ対等な影響力を持つことがわかる。つまり、$r = \dfrac{\lambda}{2\pi}$ を「近傍と遠方の境界距離」と見なしてもよいだろう。

【あとがき】

本ノートでは、導出過程で２つの近似を適用した。ダイポールのサイズが、「観測者までの距離に比べて無視でき」、また「波長よりもずっと短い」としたことである。

ダイポールのサイズが無視できない問題を解く場合は、近似解を用いると誤差が大きくなる。この場合、まず、ダイポールを微少サイズのエレメントに分割し、各エレメントが及ぼす近傍解得て、それらを合計することで、割と簡単に全貌を知り得るだろう。

近傍解は、エバネッセント光の解析やカシミール力の計算など極微の世界にも適用されている。カシミール力は、物体の表面に働く力であるが、H.Puthoffによると、これを体積に適用した場合、重力に相当する力が導かれるという。重力を電磁波起源説で解き明かすことができれば、重力をコントロールする技術の開拓も可能になるだろう。

改訂履歴

2009-0129 初版作成(EKBO 杉山敏樹)

2013-1129 「はじめに」「あとがき」を記した(EKBO 杉山敏樹)

2013-1130 「遠方解」について付記した

2016-1107 誤字を修正した。

近傍と遠方の境界に関する記述を４節から分離し、６節として記載しなおした。

図３の一部が切れていたので、修正した。

2023-0124 ハイパーリンク更新