カテナリー曲線の方程式と解法

エクボ株式会社 杉山敏樹

1.概要

大規模な構造物に配置する電線の形状が意味を持つ場合がある。
無線アンテナのエレメントをワイヤーで張る場合、ワイヤーがまっすぐであることが好ましく、しかし強く張ると張力が大きくなり、電線や構造物に負担がかかるため、適度な「たるみ」を持たせなければならない。
この問題は、高電圧線を敷設、高周波機器（たとえばテスラコイル）間の接続、電磁バリア設備の製作において、絶縁空間を確保しつつ断線しない範囲を策定するために考慮しなければならない。

一様な重力場の中で、２点間に張る電線のカーブは、カテナリー曲線（懸垂曲線）と呼ばれる。その形状は、重力の強さや電線の重さに無関係であり、２点間の距離と電線の長さのみで決まる。

本報では、下方向に重力がある場で、屈曲可能で一様な質量を持った線の両端を固定したときに、線の曲線形状を導き、支点間距離 L、たるみ H、線の長さ s、水平張力 T_0 などの関係を導く。
また、使いやすい公式を得るために、テイラー展開を介して近似式も導いた。

2.前提条件

図１に問題を解く前提となる条件を示す。

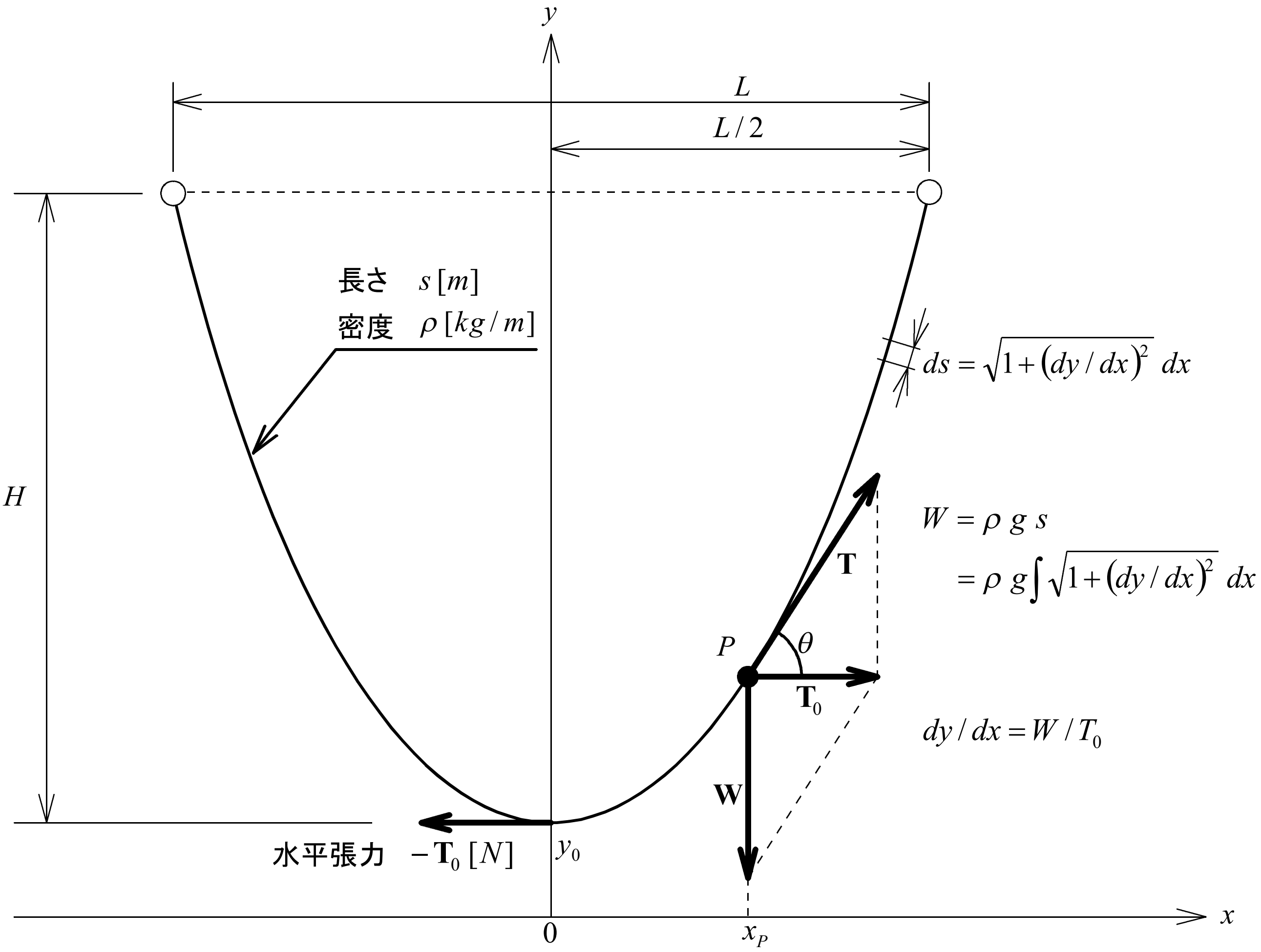

図１　条件

重力場の一様性を考慮すると、曲線は y 軸を中心に左右対称であり、x=0 では曲線の傾きは 0 になる。このとき最下点に作用する張力を T_0 とする。また、曲線の任意の点において、水平方向の張力は T_0 となる。

P 点では、$x=0\sim x_P$ の区間の曲線の重量 W が下方向に加わるため、T_0 と W の合成値が P 点にかかる張力 T となる。

微小長 ds は

$$ds=\sqrt{1+(dy/dx)^2}\;dx \tag{1}$$

これを積分すると

$$s=\int\sqrt{1+(dy/dx)^2}\;dx \tag{2}$$

T の向きは、曲線の接線に沿うので、

$$\frac{dy}{dx}=\frac{W}{T_0} \tag{3}$$

である。
重力加速度を g とすると

$$W = \rho\, g\, s\big|_{x=0\sim x_P}$$

$$= \rho\, g \int_0^{x_P} \sqrt{1+(dy/dx)^2}\, dx \qquad (4)$$

3.方程式の解

式(4)を(3)に代入すると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\rho\, g}{T_0}\int_0^{x_P} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \qquad (5)$$

ここで

$$a \equiv \frac{\rho\, g}{T_0} \qquad (6)$$

$$p \equiv \frac{dy}{dx} \qquad (7)$$

と置くと、式(5)は

$$p = a\int_0^{x_P} \sqrt{1+p^2}\, dx \qquad (8)$$

となる。ちなみに

$$\boxed{b \equiv 1/a = \frac{T_0}{\rho\, g}} \qquad (9)$$

をカテナリー数と呼ぶ。

式(8)を x で微分すると

$$p' = a\sqrt{1+p^2} \qquad (10)$$

両辺を 2 乗すると

$$p'^2 = a^2\left(1+p^2\right) \qquad (11)$$

この微分方程式を解くために、両辺をさらに微分する。

$$2p'\, p'' = 2a^2 p\, p'$$

$$\therefore p'' - a^2 p = 0 \qquad (12)$$

式(12)は線形微分方程式であり、これを解くと

$p = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}$ 、但し C_1, C_2 は定数 (13)

となる。次に、境界条件を用いて、C_1, C_2 を決める。

4.境界条件

●境界条件１　　$x=0$ のとき、$p=0$

したがって

$$C_2=-C_1 \tag{14}$$

であり、式(13)は、

$$p=C_1\left(e^{ax}-e^{-ax}\right) \tag{15}$$

●境界条件２　　$x=0$ のとき、$y=y_0$

式(7)より

$$y=\int p\,dx \tag{16}$$

これに式(13)、(14)を代入すると

$$y=\frac{C_1}{a}\left(e^{ax}+e^{-ax}\right)+C$$

$$=\frac{2C_1}{a}\cosh(a\,x)+C \text{、但し } C \text{ は定数} \tag{17}$$

ここで、境界条件２を適用すると

$$y_0=\frac{2C_1}{a}+C \tag{18}$$

$$C=y_0-\frac{2C_1}{a} \tag{19}$$

●境界条件３　　$x=L/2$ のとき、$y=y_0+H$

式(17)に境界条件３を適用すると

$$y_0+H=\frac{C_1}{a}\left(e^{aL/2}+e^{-aL/2}\right)+C$$

$$=\frac{2C_1}{a}\cosh(a\,L/2)+C \tag{20}$$

式(18)を(20)に代入

$$\frac{2C_1}{a}+C+H=\frac{2C_1}{a}\cosh(a\,L/2)+C$$

$$H=\frac{2C_1}{a}\left(\cosh(a\,L/2)-1\right)$$

$$\therefore C_1=\frac{a\,H}{2\left(\cosh(a\,L/2)-1\right)} \tag{21}$$

また、式(19)は、

$$C=y_0-\frac{H}{\cosh(a\,L/2)-1} \tag{22}$$

5.解

式(21)、(22)を式(17)に適用すると

$$y = H\frac{\cosh(a\,x)-1}{\cosh(a\,L/2)-1}+y_0 \tag{23}$$

式(23)を微分すると

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= p \\ &= a\,H\frac{\sinh(a\,x)}{\cosh(a\,L/2)-1}\end{aligned} \tag{24}$$

このままでは、T, T_0 を知りたい場合に、計算を進めることは困難なので、この後、テイラー展開を介した近似式で考察してみる。

6.近似式

指数関数のテイラー展開は

$$\begin{aligned}e^{ax} &\approx 1+a\,x+\frac{a^2x^2}{2}+\frac{a^3x^3}{6}+\cdots \\ e^{-ax} &\approx 1-a\,x+\frac{a^2x^2}{2}-\frac{a^3x^3}{6}+\cdots\end{aligned} \tag{25}$$

なので、双曲線関数は以下のように近似される

$$\begin{aligned}\cosh(a\,x) &= \frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2} \\ &\approx 1+\frac{a^2x^2}{2} \\ \sinh(a\,x) &= \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2} \\ &\approx a\,x+\frac{a^3x^3}{6}\end{aligned} \tag{26}$$

6-1. T_0 の算出

式(24)を微分すると

$$p' = a^2 H \frac{\cosh(a x)}{\cosh(a L/2) - 1} \qquad (27)$$

近似式(26)を適用すると

$$p' = 8H \frac{1 + a^2 x^2 / 2}{L^2} \qquad (28)$$

となる。これと式(10)から p' を消去すると

$$a\sqrt{1+p^2} = 8H \frac{1 + a^2 x^2 / 2}{L^2} \qquad (29)$$

ここで、$x = 0$ のとき、$p = 0$ であることを用いると

$$a = \frac{8H}{L^2} \qquad (30)$$

これと式(6)から a を消去すると

$$\boxed{T_0 = \frac{\rho g L^2}{8H}} \qquad (31)$$

となる。水平方向張力は、弛み H に反比例し、支点間隔 L の 2 乗に比例する関係であることがわかる。

ちなみにカテナリー数は、式(9)、(30)より

$$\boxed{b = \frac{L^2}{8H}} \qquad (32)$$

である。

6-2.曲線全長の算出

曲線の全長($x=-L/2 \sim L/2$ の区間) s_{all} を計算してみる

曲線右支点の傾きは、式(3)、(4)、(6)より

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=L/2} = a\left.s\right|_{x=0\sim L/2} \tag{33}$$

である。s は、曲線の右半分の長さであるのに対し、s_{all} は左右両側の長さであることを留意すると

$$s_{all} = 2\left.s\right|_{x=0\sim L/2} = \frac{2}{a}\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=L/2} \tag{34}$$

であり、これに式(24)、(26)を適用すると

$$\begin{aligned} s_{all} &= 2H\frac{\sinh(aL/2)}{\cosh(aL/2)-1} \\ &= H\left(\frac{8}{aL}+\frac{aL}{3}\right) \end{aligned} \tag{35}$$

さらに、式(30)の関係を用いると

$$\boxed{s_{all} = L + \frac{8H^2}{3L}} \tag{36}$$

6-3.支点におけるTの算出

図１の力のベクトル図から

$$T\big|_{x=L/2}=T_0\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=L/2}\right)^2} \tag{37}$$

ここで、dy/dxについて式(30)、(34)、(35)の関係が使えるので

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=L/2}&=\frac{a}{2}s_{all}\\&=\frac{4H}{L}+\frac{32H^3}{3L^3}\end{aligned} \tag{38}$$

したがって

$$\boxed{T\big|_{x=L/2}=T_0\sqrt{1+\left(\frac{4H}{L}+\frac{32H^3}{3L^3}\right)^2}} \tag{39}$$

となる。

ここで、

$$\eta\equiv\frac{H}{L} \tag{40}$$

とおくと

$$T\big|_{x=L/2}=T_0\sqrt{1+\left(4\eta+\frac{32}{3}\eta^3\right)^2} \tag{41}$$

であり、もし、$\eta<<1$と見なせる条件下であれば、次のように近似できる。

$$\boxed{T\big|_{x=L/2}=T_0\left(1+8\eta^2\right)} \tag{42}$$

これによると、支点の張力は、T_0に対して微増する程度であり、実用的にはT_0がわかればこれを$T\big|_{x=L/2}$の代用として、支点におけるおおまかな応力計算に使える。

7.参考文献

カテナリー曲線

https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%82%AB%E3%83%86%E3%83%8A%E3%83%AA%E3%83%BC%E6%9B%B2%E7%B7%9A/

8.変更履歴

2013 年 11 月 9 日　新規作成　EKBO　T.Sugiyama

2023 年 01 月 24 日　ハイパーリンク更新